910. D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I. (2017). Proposte metodologiche illusorie nel processo di insegnamento della matematica. *Bollettino dei docenti di matematica*. 73, 15-42.

Proposte metodologiche illusorie nel processo d'insegnamento della matematica.

Bruno D'Amore[1-2] – Martha Isabel Fandiño Pinilla[2]
[1] Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotà
[2] NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna.

Abstract. In this paper we present and critically discuss methodologies and tools that have been proposed in illusory way as positively decisive in the complex process of learning mathematics. We present historical and didactic analysis to show the futility in some cases and in others the harmfulness.

0. Premessa

La disciplina "didattica della matematica" ha una storia propria da circa una quarantina di anni, definita da studi specifici, uno dei quali appartiene ad Artigue, Gras, Laborde e Tavignot (1994) e fa riferimento a «vent'anni di didattica della matematica in Francia»; attualmente, dunque, poco più di di 40 anni.
È possibile definire l'evoluzione storica di questa disciplina partendo dall'evoluzione degli interessi dei ricercatori ed è con questo intento che, alla fine del Ventesimo secolo, abbiamo proposto il seguente itinerario (D'Amore, 1999):

- *Didattica A* ("A" da "ars docendi", traduzione dal latino della parola «didattica»): la didattica delle origini, in cui gli studiosi concentravano tutta la loro attività su analisi legate all'insegnamento della matematica (che cosa insegnare, quando e come): curricoli, progetti educativi, strumenti per l'insegnamento, …). Temporalmente, questa fase va situata tra gli anni Cinquanta e la metà degli anni Ottanta del Ventesimo secolo, malgrado sia tuttora in uso, dal momento che in alcuni centri di studio di svariati paesi vengono perseguiti esclusivamente obiettivi di questo tipo.
- *Didattica B* ("B" in quanto successiva ad "A") o epistemologia dell'apprendimento della matematica: è quella che considera l'apprendimento della matematica come fatto specifico e tema principale della ricerca. Facciamo riferimento al 1986 come data approssimativa della transizione definitiva della ricerca in didattica A a quella in didattica B, basandoci sull'articolo di Guy Brousseau pubblicato in quello stesso anno (Brousseau, 1986), l'ultimo di una successione di lavori dello stesso Autore il cui obiettivo era quello di smantellare una forma ascientifica di considerare la ricerca in didattica della matematica per passare a una nuova fase. È su di esso, ad esempio, che si basa la "teoria delle situazioni", essenziale per la nascita della moderna teoria Didattica della matematica (Brousseau, 2015).
- *Didattica C* ("C" in quanto successiva a "B"): è la fase in cui i ricercatori cambiano la tipologia del soggetto di studio, passando dallo studente al docente e alle sue convinzioni, decisive per la creazione e l'analisi delle situazioni nell'aula (D'Amore, 2006). Possiamo considerare i primi anni del XXI secolo come l'inizio di tale approssimazione (Leder, Pehkonen & Törner, 2002).

Quasi sempre incentrate nella fase A, furono sviluppate idee, proposti suggerimenti e lanciate idee, … allo scopo di "migliorare" la prassi d'insegnamento della matematica nei vari livelli scolastici.
Dato che la fase A si caratterizza per la mancanza di rigore nella ricerca, non vi sono fondamenti scientifici che sostentino le metodologie proposte. La questione è che, per convalidare la significatività di uno strumento didattico (tipo A), è necessario verificare empiricamente l'apprendimento (tipo B). Se le proposte sono esclusivamente legate alla fase A, non può esserci una conferma significativa su basi scientifiche né degli strumenti né dell'apprendimento.

D’altro canto esiste una profonda distanza tra la pratica scolastica quotidiana dei docenti e le fonti di ricerca in didattica della matematica. La maggior parte delle riviste di ricerca non possono essere consultate o vengono considerate inaccessibili dagli insegnanti. Lo stesso vale per i congressi, i corsi e i seminari di ricerca. Oggi esistono molte riviste che si occupano della divulgazione della ricerca, congressi, seminari ecc., ma il divario rimane profondo, come confermano altri studiosi del settore (Boero et al., 1996; Adler et al., 2005).
È inoltre risaputo che in generale un docente, nella sua ricerca di qualcosa che potremmo chiamare *panacea* (Kimmel & Deek, 1996), si lascia sedurre volentieri quando gli vengono offerte metodologie il cui ideatore garantisce l’effetto positivo sull’apprendimento; in questo articolo viene usato esattamente il termine “panacea” nello stesso senso usato da Kimmel e Deek (vedasi anche Powers & Powers, 1999).
L’obiettivo di questo lavoro è la discussione critica di alcune di queste proposte illusorie che durante un certo periodo incontrarono successo e gran diffusione nella speranza che il docente imparasse a far uso dei criteri di analisi degli strumenti concreti spesso suggeriti per l’azione nell’aula.
Dividiremo l’articolo in due parti: alcune idee metodologiche illusorie e alcuni strumenti concreti chimerici. La distinzione tra metodologie e strumenti è sottile, dato che molti degli ideatori di strumenti li presentano attraverso una metodologia. Dal canto nostro abbiamo deciso di operare una distinzione tra le idee astratte e gli strumenti concreti. Per quanto riguarda le prime, suggeriamo metodologie d’insegnamento; mentre, per quanto riguarda i secondi, presentiamo degli oggetti veri e propri come strumenti d’insegnamento, ma sempre da collocare tra le mani degli allievi. Più avanti presenteremo una lista e un’analisi dei più conosciuti tra questi strumenti.
Come punto di partenza di questo articolo, vogliamo dichiarare esplicitamente quanto segue: le scelte del docente, anche se sono personali, non lo sono in senso stretto; sono infatti fortemente influenzate dal contesto ideologico e pedagogico dell’epoca in cui vengono operate. Per questo motivo non si può, in nessun momento, colpevolizzare il docente per le sue scelte che, in alcune occasioni, si rivelano erronee agli occhi dei ricercatori; ciò che si può fare è identificarle, studiarle e analizzarle.

1. Alcune idee metodologiche illusorie

Enumeriamo, descriviamo e commentiamo alcune proposte del passato che hanno condizionato su basi illusorie il complesso processo d’insegnamento – apprendimento della matematica.

1.1. Insegnare la logica degli enunciati a tutti i livelli scolastici

Negli anni ’90 del XXI secolo, si pensò che, insegnando la logica degli enunciati a tutti gli studenti, di qualsiasi età, questi avrebbero automaticamente imparato le basi stesse della matematica, avrebbero imparato a “ragionare”, a fare un uso corretto delle deduzioni e a condurre delle dimostrazioni.
Questa illusione trasversale si basava su di un’analogia tra gli elementi della logica degli enunciati e la lingua materna: connettivi logici come connettori della lingua naturale, quantificatori logici come quantificatori linguistici, enunciati logici come frasi del linguaggio, deduzioni come argomentazioni.
Dopo vari anni di sperimentazioni in questo senso, divenne evidente che questo tipo di analogie non era così immediato come si era pensato in un primo tempo (D’Amore, 1991).
Anzi, si constatò che sono pochi gli studenti che ricorrono agli elementi appresi dalla logica aristotelica per elaborare una dimostrazione. Ben al contrario, è generalizzato l’uso spontaneo e incosciente della logica indiana (*nyaya*), molto più ancorata alla realtà (una specie di sillogismo di 5 termini, uno dei quali si chiama, non a caso, “esempio”) (D’Amore, 2005).

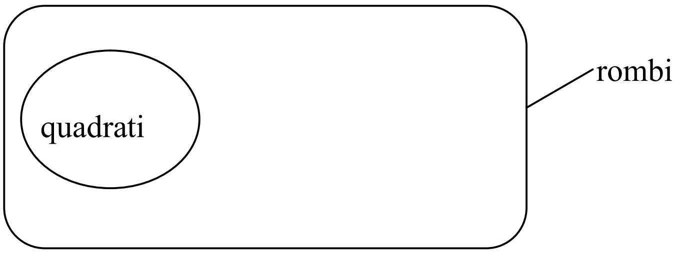
Venne in breve mostrato come insegnare la logica a tutti i livelli scolastici era un errore metodologico che contribuiva ad allontanare gli studenti dalla matematica.
Per diversi anni si fece precedere l'insegnamento della logica degli enunciati all'insegnamento della matematica tradizionale, quasi come una necessità preliminare. In generale i docenti concentravano la loro attenzione nel sollecitare la ripetizione mnemonica da parte degli studenti di tavole semantiche di verità dei connettivi.
Non siamo contrari all'insegnamento della logica, sempre e quando venga svolto in modo adeguato e opportuno. La logica formale è parte della matematica tanto come l'aritmetica, la geometria o la probabilità, ma è necessario convincersi che l'insegnamento della logica non risolve il problema meta-didattico dell'apprendimento della matematica o, peggio ancora, delle dimostrazioni.

1.2. La teoria "ingenua" degli insiemi

La maggior parte delle argomentazioni della matematica sono di tipo colletivo, non hanno cioè a che fare con oggetti matematici singoli bensì con classi di questi oggetti. Ad esempio:
- Tutti i quadrati sono (anche) rombi; il che permette di affermare che ogni quadrato è un rombo;
- L'insieme dei divisori di 3 è un sottoinsieme dei divisori di 6.

Queste argomentazioni, come ci ha insegnato Leonhard Euler (1707-1783), si possono rappresentare con opportuni grafici che illustrano a meraviglia quella che in seguito è stata chiamata «teoria elementare degli insiemi» (D'Amore & Matteuzzi, 1975; Bagni, 1996; Bagni & D'Amore, 2007; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007). Inoltre, come ben hanno mostrato i bourbakisti, quasi tutta la matematica può ridursi a studio di strutture algebriche e può dunque basarsi quasi del tutto sulla teoria degli insiemi come linguaggio formale. Questa direzione era già stata indicata da Felix Klein (1849-1925) per esempio con le sue definizioni strutturali delle diverse geometrie, che riducono le varie geometrie a gruppi algebrici particolari (D'Amore & Matteuzzi, 1975).
Negli anni Sessanta del ventesimo secolo è partita dagli Stati Uniti una riforma radicale del curricolo della matematica a tutti i livelli scolastici, basata su di una *teoria ingenua degli insiemi,* come risultato dell'autocritica al proprio sistema educativo a conseguenza del lancio del razzo sovietico *Sputnik* nel 1957. *Teoria ingenua degli insiemi* fu il lemma scelto per indicare una teoria degli insiemi non formale e certamente non assiomatica. La matematica scolastica proposta sulla base di questa teoria venne chiamata *New Math, Nuova Matematica*, *Matematica Moderna* (Phillips, 2014).
Secondo diversi autori, uno degli artefici di questa proposta teorica fu André Lichnerowicz (1915-1998) che in quel periodo lavorava in Francia. Nel 1967 il governo francese creò la «Commissione Lichnerowicz», formata da un gruppo di eminenti insegnanti di matematica. La Commissione raccomandò esplicitamente un curriculum che si basasse sulla teoria degli insiemi (adattandola a ogni livello scolastico), con il fine di far entrare i bambini precocemente in contatto con le strutture matematiche (Mashaal, 2006).
Nel 1973 le case editirici Salvat di Barcellona (Spagna) e Grammont di Losanna (Svizzera) pubblicarono un libro-intervista a Lichnerowiz di Pierre Kister, in cui Lichnerowiz difendeva la via strutturale per la matematica (ovvero basata sulla teoria degli insiemi e sulle strutture algebriche), compresa la matematica per i bambini più piccoli, della scuola primaria. Un testo di Joaquín Navarro completava il libro con esemplificazioni (Kister & Navarro, 1973). Questo libro venne tradotto in diverse lingue e contribuì fortemente, dato il prestigio accademico dell'intervistato, alla diffusione dell'idea della *Matematica Moderna* e dell'insegnamento della teoria degli insiemi in tutti i livelli scolastici.
La proposta può venir spiegata come segue: le scuole devono privilegiare, già a partire dalla scuola dell'infanzia, una teoria degli insiemi non formale, e trattare questa teoria e solo questa fino a quando non venga compresa e si sia radicata nella conoscenza degli studenti in modo tale da permettere loro di inserire in questo contesto logico-linguistico-rappresentativo qualsiasi aspetto della matematica.

Come risultato di questa prospettiva, scomparve la geometria euclidea tradizionale e l'aritmetica venne posposta. Si assistette al seguente fenomeno: gli allievi della scuola primaria imparavano il significato (almeno con esempi specifici) d'insieme vuoto, insieme universo, intersezione, sottoinsieme, appartenenza ecc., ma non sapevano fare un'addizione o una sottrazione. La reazione critica dei matematici fu violenta; in particolare, causò grande sensazione l'analisi critica del famosissimo storico della matematica Morris Kline (1973).
Le ricerche svolte in vari paesi, compresa l'Italia (D'Amore, 1975), mostrarono come si trattasse di un sogno, lontano dalla realtà dell'apprendimento e presto la teoria degli insiemi venne abbandonata. Questo percorso della matematica si era rivelato del tutto innaturale, forzato e non aveva prodotto risultati significativi, dato che seguendolo non si raggiungeva la capacità di risolvere nemmeno i problemi più banali. In particolare, si rivelarono decisive le analisi critiche, profonde e dettagliate di Guy Brousseau (1965, 1972, 1980a, 1980b, 1982, 1984, 1986; Brousseau & Perez, 1981, 1965, 1972, 1980a, 1980b, 1982, 1984, 1986).
Tuttavia, ciò non significa che non sia possibile disegnare un grafico in cui si trattino alcuni insiemi di oggetti matematici, come il seguente:



Tutti sanno interpretare questo grafico in modo intuitivo: tutti i quadrati sono rombi, ma esistono rombi che non sono quadrati. Ciò che stiamo affermando è che non è necessario sviluppare una teoria specifica per disegnare un grafico con un significato banale e intuitivo come quello dell'esempio, dato che facendolo corriamo il rischio di confondere lo strumento d'insegnamento con l'oggetto di studio, confusione questa che nella didattica della matematica viene definita come *slittamento metadidattico* (Brousseau & D'Amore, 2008).

1.3. I diagrammi di flusso

I diagrammi di flusso sono nati nell'ambito della rappresentazione grafica per fornire modelli visibili di algoritmi, procedure ordinate di svariati tipi che seguivano un ordine determinato e sequenze di operazioni. In inglese si chiamano *flow charts* e hanno avuto un grande sviluppo in informatica. Sono state create forme convenzionali per indicare la tipologia degli oggetti in questione, ad esempio rettangoli, rombi, esagoni, parallelogrammi ecc.; a ogni forma corrisponde un ben preciso signitificato. Tra queste forme vengono poste delle frecce per indicare l'ordine da seguire nella sequenza delle operazioni da eseguire o delle istruzioni. Si tratta quindi di un caso specifico dei cosiddetti diagrammi a blocchi che servono per descrivere processi. Yourdon e Constantine (1979) offrono un'esauriente rassegna storica dei diagrammi di flusso e dei loro usi.
Il successo di questo strumento rimonta al tentativo degli anni Settanta del XX sec. d'introdurre nell'insegnamento scolastico le basi dell'informatica. Uno dei primi contributi informativi di questo suggerimento è probabilmente la guida monografica n. 4 del progetto *Nuffield per la matematica* (Fondazione Nuffield), con sede editoriale a Edimburgo, Londra e Nuova York.
Questa guida (*Nuffield Project*, 1972), di uso esclusivo per docenti, in un breve lasso di tempo venne tradotta in diversi paesi.
In questo testo 4 del progetto *Nuffield*, le pagine 6-12 sono dedicate a una introduzione dei diagrammi di flusso come schemi per strutturare una successione di attività, e quindi proposti come

accesso alla descrizione degli algoritmi e in seguito alla programmazione dei computer come oggetto d'insegnamento e apprendimento della matematica.
Abbiamo analizzato numerose pubblicazioni di quel periodo, dalla prima metà del 1980 fino alla metà del 1990, e i diagrammi di flusso vengono sempre proposti mirando agli obiettivi per i quali erano stati creati originariamente e cioè insegnare agli studenti a programmare, all'inizio principalmente in linguaggio BASIC, finalità questa che venne progressivamente abbandonata e che oggi è proposta solo in rare occasioni. (In realtà, ogni tanto fa capolinol'idea di insegnare ai bambini a programmare, come tema matematico).
Non è dato sapere da dove sia sorta l'idea di utilizzare questo strumento di carattere puramente descrittivo convertendolo in uno strumento strategico-risolutivo in chiave didattica. L'ipotesi didattica potrebbe venir descritta come segue: i diagrammi di flusso vengono usati per rappresentare il processo da seguire per risolvere problemi, indipendentemente dal livello scolastico, a partire dalla scuola primaria, facendo coincidere il ragionamento risolutivo con la rappresentazione del processo.
Questo ragionamento poggia sull'idea che l'uso dei diagrammi di flusso avrebbe aiutato gli studenti a riflettere sul procedimento e avrebbe quindi stimolato l'aumento della capacità di risolvere problemi. Il testo più frequentemente citato da quasi tutti i sostenitori di questa deviazione del significato reale dei diagrammi di flusso è il famoso libro di Seymour Papert (1980), tradotto in diverse lingue.
Tuttavia, ci sono due punti critici sui quali è necessario riflettere.

Punto 1

Nella risoluzione di un problema, senza importarne il tipo, c'è sempre un momento creativo. Ad esempio, nel classico studio di Glaeser (1975), nella successione delle azioni di risoluzione dei problemi ci sono 5 fasi che ne costituiscono il processo euristico:

- la preparazione;
- l'incubazione;
- il "bricolage";
- l'eureka;
- la verifica e la redazione

L'eureka è il momento centrale, irrinunciabile e creativo. Inoltre, è proprio questo fatto quello che differenzia la risoluzione di un problema rispetto all'esecuzione di un'operazione o di un esercizio, attività che si considera richiedano un minor grado di esigenze cognitive. Pertanto, *nessuna* rappresentazione grafica di un problema, per quanto dettagliata possa essere, facilita la capacità di affrontare con successo il momento creativo (strategico, secondo alcuni), messo in atto per risolvere un problema (D'Amore, 1995) .

Punto 2

La difficoltà di descrivere mediante un diagramma di flusso un determinato problema è sempre di gran lunga superiore alla difficoltà di risolverlo, indipendentemente dall'età o dal livello, in particolare nella scuola primaria e nei primi anni della secondaria. Pertanto, all'evidente e ben nota difficoltà degli studenti di risolvere problemi, l'applicazione dei diagrammi di flusso non forniva una risposta in termini di reale aiuto ma, al contrario, aggiungeva un'ulteriore difficoltà, in genere insuperabile. Molti furono gli studenti di primaria o secondaria che dichiararono di trovarsi in difficoltà con il disegno del diagramma di flusso, e ciò anche se erano stati in grado di risolvere il problema senza ricorrere a detto diagramma. Ci sono evidenze di bambini che asseriscono di saper risolvere il problema ma di non saper disegnare il diagramma di flusso e alcuni affermano che sanno di doverlo disegnare perché è ciò che l'insegnante pretende in classe (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani & Sbaragli, 2008; D'Amore & Marazzani, 2011).

In seguito alla messa in evidenza di questi punti critici, in gran parte del mondo questa illusione è stata ampiamente criticata e il ricorso a questo strumento completamente abbandonato (D'Amore,

2014). Ciò non significa che non si possano utilizzare sequenze ben strutturate per indicare l'ordine delle operazioni da eseguire; anzi, a volte è assai utile. Lo spieghiamo con un esempio.
Un bambino di scuola primaria tende a usare il segno *uguale* in senso procedurale e non relazionale, come auspicato nell'ambito dell'insegnamento (Camici et al., 2002). Ciò significa che alcuni bambini risolveranno il problema: *Un cartolaio acquista 12 scatole di penne che contengono ciascuna 6 penne; ogni penna costa 2 euro. Quanto spende il cartolaio?*, nel modo seguente:
12×6=72×2=144
e non così:
12×6=72
72×2=144
perché ritengono che il segno = significhi «dà» («resulta»), ovvero che il segno = indichi una procedura (Boero, 1986; D'Amore, 1993a).[1]
Le due espressioni sono simili dal punto di vista semiotico ma non da quello semantico. Le due funzioni, oggettivazione e comunicazione, sono fondamentalmente distinte e portano quindi a giudizi assai differenti per quanto concerne la valutazione della produzione dell'alunno (Duval, 1995a, b).
Diversi ricercatori di tutto il mondo suggeriscono di proporre ai bambini la sostituzione del segno = con una freccia, per appropriarsi il significato di uguaglianza un po' alla volta (Boero, 1986; D'Amore, 2014). È pertanto necessario che il bambino prenda coscienza del fatto che vanno eseguite due operazioni e che nel processo di risoluzione del problema la seconda operazione è consequenziale alla prima.
Da alcuni anni a questa parte, la proposta di precedere il processo di risoluzione di un problema con uno schema del testo e poi con il procedimento da seguire sotto forma di diagramma di flusso è stata completamente abbandonata; ma quest'idea ha rappresentato un'illusione mantenutasi nel mondo della scuola per più di un decennio.

1.4. "Ricette" metametodologiche per risolvere problemi

Dato che l'apprendimento strategico (Fandiño Pinilla, 2010) sembra essere uno dei più complessi in quasi tutti i livelli scolastici, nel corso degli anni sono stati proposti suggerimenti metodologici che il docente utilizza per stimolare gli studenti durante la risoluzione di un problema. Si tratta solitamente di stimoli concreti e indicatori di direzioni strategiche per la risoluzione del problema. Un'analisi attenta mostra l'inutilità di questi suggerimenti che, talvolta, sortono l'effetto contrario.
Questo tipo d'indicazioni si possono riunire in un gruppo che chiameremo "ricette metodologiche" (modelli normativi). (Troviamo la definizione di questo tipo di modelli, la loro presenza in aula e la loro inutilità già espresso in Kleinmuntz, 1976; una rassegna storico-critica in D'Amore, 1999). È interessante constatare che quando allo studente viene chiesto di descrivere i suoi processi personali di risoluzione, egli usi esattamente le frasi del docente come se fossero un copione (Kleinmuntz, 1976; Resnick & Ford, 1981); oggi sappiamo senz'ombra di dubbio che questo tipo di atteggiamento è dovuto al fenomeno del contratto didattico (Brousseau, 1986; per un'analisi più aggiornata si veda D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani & Sarrazy, 2010).
Abbiamo identificato alcuni di questi stimoli, considerati dagli insegnanti delle guide metodologiche utili e necessarie per risolvere un problema di matematica. Per ciascuno di questi stimoli proponiamo un commento scaturito dalle riflessioni critiche dei docenti stessi. (Riguardo all'identificazione di queste frasi e alle autocritiche degli insegnanti in servizio, si veda D'Amore, 1993a e 2014).

---

[1] Naturalmente, è possibile proporre diverse interpretazioni del fenomeno, che è sempre stato spiegato come un tentativo di uso *comunicativo*, mentre potrebbe essere, al contrario, il risultato di una *oggettivazione* fatta dal bambino (D'Amore, 2001). Potrebbe dunque venire spiegato come una rappresentazione abbreviata o condensata del processo eseguito per ottenere la risposta (Duval, 1995a).

- «Devi fare molta attenzione»; il fatto di prestare attenzione a ciò che si sta facendo non è qualcosa che possa venir ordinato dall'esterno, né è una condizione sufficiente per raggiungere l'apprendimento concettuale o per risolvere un problema.
- «Leggi bene il testo»; il testo in cui si propone un problema non è sempre per forza un testo scritto; il problema può venir presentato tramite un disegno oppure oralmente o con un grafico o in tanti altri modi; inoltre il "leggere bene" non ha un significato preciso; lo studente potrebbe "leggere bene" un testo, parola per parola, e non capire il significato di ciò che ha letto.
- «Leggi bene la domanda»; alla critica precedente va aggiunto che non sempre la domanda del problema è esplicita; a volte non è nemmeno presente.
- «Racchiudi in un circolo i dati numerici»; i dati non sempre corrispondono a numeri e non sempre questi dati numerici sono utili per risolvere un problema.
- «Sottolinea la domanda»; non sempre è necessario evidenziare la domanda; inoltre ci sono problemi in cui non è possibile caratterizzare la domanda, il che porta inevitabilmente al fallimento.
- «Cerca la parola chiave che ti aiuterà a capire»; la presunta "parola chiave" può essere un ostacolo semantico nella ricerca dell'eventuale operazione risolutiva. Alcuni studi di didattica degli anni ottanta del XX sec. hanno messo in evidenza che questo suggerimento porta al fallimento. Prendiamo questo esempio: "Ho 3 biglie però per giocare ho bisogno di 7 biglie; quante ne devo *aggiungere* a quelle che ho già?". La supposta "parola-chiave" è "aggiungere". Pertanto, sulla base del modello intuitivo, chi sta cercando di risolvere il problema eseguirà un'addizione e non l'auspicata sottrazione (Fischbein, 1985a, 1985b; Fischbein & Vergnaud, 1992; Moser, 1985a, 1985b; D'Amore 1993a, 1999, 2014; Vergnaud, 1981, 1982, 1983).
- «Decidi qual è l'operazione (aritmetica) da realizzare»; non sempre c'è una supposta «operazione da eseguire» per caratterizzare la risoluzione di un problema.
- «Analizza se il numero che stai cercando deve aumentare (in questo caso si tratta di una addizione o di una moltiplicazione) o diminuire (in questo caso devi usare …)»; le operazioni "che aumentano" o "che diminuiscono" sono uno dei suggerimenti più erronei che un docente può dare ai propri studenti; serva da esempio una moltiplicazione che non aumenta: 12×0,5 (Fischbein, 1985a, 1985b).

Mostriamo un caso in cui questi suggerimenti sono, di fatto, un ostacolo alla risoluzione di un problema: "Un pastore ha 12 pecore e 6 capre; quanti anni ha il pastore?"(Brissiaud, 1988; D'Amore, 1993a). Il bambino, sulla base dei precedenti suggerimenti, normativi e descrittivi, perde il contatto con il nonsenso del rapporto tra testo e domanda e si concentra sui dati numerici (li racchiude in un circolo con la matita), sulla domanda (la sottolinea) e sulla presunta operazione da eseguire. Poi legge e rilegge con attenzione ciasuna singola parola del testo. E così, invece di dare una risposta corretta del tipo: «La domanda non ha nulla a che fare con il testo» (o simili), in una percentuale elevata propone come risposta «12 + 6» (D'Amore, 1999).
(Riguardo a tutto ciò vedasi anche: Brousseau & D'Amore, 2008).
Per concludere, diremo che: non ci sono né modi, né strategie, né algoritmi, né indicazioni verbali opportune per insegnare a risolvere problemi a nessun livello scolastico; la fase creativa "eureka" (vedi 1.3.) non può venir identificata con un algoritmo. Non è un caso che attualmente venga fatta una distinzione tra "esercizio" (la cui prassi esecutiva si sviluppa nella zona effettiva di Vygotskij) e "problema" (la cui prassi risolutiva si sviluppa nella zona di sviluppo prossimale di Vygotskij) (Fandiño Pinilla, 2010).

1.5. Il laboratorio di matematica

Nei decenni del 1960 e del 1970 fu sviluppata l'idea di non limitare l'insegnamento e l'apprendimento solo al lavoro in aula e alla teoria, alle lezioni "frontali", come venivano chiamate

allora, ma di estenderli al "fare" (De Bartolomeis, 1978; per una sintesi storica dell'evoluzione delle metodologie d'insegnamento, vedasi Frabboni, 2004).
Si trattava di creare attività manuali in cui il concetto matematico che si voleva conseguire venisse modellato concretamente e lo studente veniva invitato, da solo o in gruppo, a entrare in un vero e proprio laboratorio, dotato di strumenti per lavori manuali (semplici), allo scopo di realizzare manufatti che rispondessero a determinati compiti e a determinate caratteristiche che erano illustrazioni concrete di idee matematiche.
Riguardo alle modalità pratiche e teoriche d'interpretazione dei laboratori, ci furono ampi dibattiti; noi sostenevamo e sosteniamo l'interpretazione "forte", vale a dire:

• un laboratorio dev'essere concepito come una vera e propria officina, con attività concrete specifiche;
• con attori specifici (non solo studenti), ad esempio un esperto di laboratorio; va evitata l'identificazione dell'esperto di laboratorio con l'insegnante, per non creare nell'ambiente di laboratorio il sorgere di norme negative implicite tipiche del contratto didattico;
• un locale specifico (non la classe in un lasso di tempo in cui viene fatta astrazione della *routine* di classe).

Tutto questo, corredato di esempi concreti, teorie specifiche e guide pratiche, si può trovare ad esempio in Caldelli e D'Amore (1986) e D'Amore (1988, 1989, 1990-1991).
Si potrebbe collocare alla base di questa metodologia di insegnamento la seguente riflessione-speranza: se lo studente fa, costruisce la matematica della realtà e all'interno della realtà, detta matematica implicherà un apprendimento efficace. Vale senza dubbio la seguente massima: *se faccio, capisco*.
Vennero allora studiate molteplici attività che permettessero di raggiungere quest'obiettivo che inizialmente non sembra avere nessuna relazione con la matematica, di per sé astratta (ad esempio Caldelli & D'Amore 1986; D'Amore, 1988, 1989, 1990-91).
Furono allestite mostre pubbliche in cui esporre gli oggetti realizzati nel laboratorio, con lo scopo di rafforzare la motivazione e, al contempo, rendere gli studenti partecipi del processo di diffusione di ciò che avevano appreso. Venivano coinvolte anche altre classi e altri genitori; in altre parole, il mondo della noosfera (D'Amore, 1981 1982a, 1982b, 1982c, 1987a, 1987b, 1988 1989a, 1989b).
All'inizio del primo decennio del 1980, un gran numero di Provveditorati agli Studi d'Italia,[2] sensibili a questo tipo di esperienze didattiche, concedevano una riduzione dell'onere accademico: alcuni insegnanti cambiavano il loro status di docenti e si convertivano almeno parzialmente in esperti di laboratorio. Ciò avvenne in particolare a Bologna città (a un certo punto, in una sperimentazione condotta da uno degli autori di questo articolo, si giunse ad avere 10 insegnanti in questa veste) e nella provincia (Imola, Castel San Pietro), così come 10 solo a Lugo (Ravenna).
Il laboratorio, nella nostra concezione, è quindi un luogo diverso dall'aula, dotato di tutti gli strumenti necessari per l'elaborazione di un oggetto concreto realizzato dallo studente e che dispone di un apposito tecnico che aiuta gli studenti da un punto vista concreto. Nella discussione fra docente e studenti, nell'aula, viene messo in evidenza un problema concettuale matematico, che viene interpretato da un punto di vista concreto, si trasforma nel progetto di un manufatto che realizzi determinate condizioni e risolva determinati problemi. Da solo o in gruppo, lo studente, in certi orari abbandona l'aula e si trasferisce in laboratorio, dove il progetto deve venir trasformato in un oggetto concreto. Il manufatto finito viene discusso dal gruppo con il tecnico. In un secondo tempo, superato l'esame, viene portato in aula e proposto al docente e ai compagni mediante spiegazioni dal punto di vista matematico. I risultati eran considerati eccellenti e il consenso attorno a questa modalità era totale, ma già a metà del decennio del 1980, le nostre analisi didattiche e le osservazioni empiriche in aula cominciarono a mostrare i limiti di questa metodologia didattica (D'Amore, 1988). In una conferenza intitolata *Il laboratorio di matematica: luogo di motivazione e attitudini*, svoltasi a Milano in occasione della XIX riunione del GIRP (*Groupe International de*

[2] Direzioni scolastiche provinciali, rappresentanze locali del Ministero italiano della pubblica istruzione, con potere autonomo di decisione.

Récherche en Pédagogie de la Mathématique), 15-22 luglio del 1990, uno degli autori di questo testo mise in evidenza alcuni punti deboli di detta metodologia, venuti alla luce in oltre 10 anni di esperienza e osservazioni.
Nel laboratorio si manifestavano casi di rifiuto della metodologia, a esempio in studenti poco interessati al *bricolage*; vennero a crearsi situazioni analoghe a quelle provocate dal contratto didattico in aula. Una volta costruito un oggetto-modello, sorgevano difficoltà per reinterpretarlo sulla base del problema matematico che sosteneva la sua costruzione, così come molti altri problemi di ordine didattico.
D'altro canto, l'unicità metodologica non può garantire, per la sua propria natura, il successo nell'apprendimento (D'Amore, 2003). Questa affermazione è confermata da tutti gli studi d'ingegneria didattica, nell'ambito della teoria delle situazioni (D'Amore, 1999; D'Amore & Sbaragli, 2011).
Attualmente, il laboratorio di matematica esiste ancora; ne siamo sostenitori e lo proponiamo come metodologia didattica, compresa la fase delle esposizioni aperte al pubblico (D'Amore & Giovannoni, 1997). Tuttavia, le nostre analisi e la consapevolezza raggiunta ci hanno imposto di riconoscere come sia necessario tener conto dei suoi limiti e mettere in evidenza le contraddizioni intrinseche all'uso di detta metodologia didattica (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2003).
Il laboratorio come modalità didattica d'insegnamento-apprendimento esiste ancora e rappresenta un'eccellente modalità alla quale si fa riferimento ancora oggi (D'Amore & Marazzani, 2005, 2011). Ciò nonostante, il suo uso richiede una valutazione critica che tenga in considerazione gli studi scientifici svolti al riguardo: oggigiorno non si può più pensare al laboratorio come a una panacea o a una metodologia del tutto positiva.

1.6. Uso della storia della matematica nell'insegnamento della matematica

Riteniamo che, così come la letteratura si studia attraverso la storia, possa essere interessante dare agli studenti informazioni di carattere storico (D'Amore, 2004). C'è una bella differenza fra l'italiano di Dante Alighieri (1265-1321) e quello di Italo Calvino (1923-1985), così come c'è una gran differenza tra lo spagnolo di Miguel de Cervantes Saavedra (1547-1616) e lo spagnolo di Gabriel García Márquez (1927-2014). Si ha spesso l'impressione che la matematica sia astorica e che Pitagora, Cartesio e Peano fossero colleghi contemporanei, mentre fra il primo e l'ultimo c'è un intervallo di 2500 anni, la qual cosa sorprende molti e non solo gli studenti. Prendendo sempre in considerazione il punto di vista dell'apprendimento dell'allievo, siamo stati partecipi attivi del fatto che molte questioni matematiche possono facilmente e significativamente essere proposte agli allievi chiamando in causa fatti storici e abbiamo fortemente contribuito a creare materiale adatto a questa trasposizione didattica (solo come esempio: D'Amore & Speranza, 1989, 1992, 1995; ma i contributi in tal senso di vari autori sono molti di più).
Anzi, abbiamo teorizzato il fatto che l'uso della storia possa avvenire su tre piani distinti:

- epistemologico-critico,
- cronologico e
- aneddotico,

con funzioni didattiche profondamente diverse (D'Amore, 2004).
Sul piano della formazione degli insegnanti, poi, abbiamo sempre insistito sull'importanza di una formazione:

- in prima battuta: disciplinare (apparteniamo ancora alla vecchia guardia, di coloro che ritengono che: non può insegnare la disciplina X chi non è ottimo conoscitore di X);
- in seconda battuta: didattica (conoscere la disciplina X è condizione necessaria ma non sufficiente per insegnare X: oggi esiste la didattica disciplinare di X);
- in terza battuta: storica ed epistemologica.

Quest'ultimo aspetto è necessario non solo per motivi culturali (che a noi sembrano ovvii), ma anche professionali: la didattica della matematica e più precisamente la teoria degli ostacoli

(D’Amore, 1999) ha ampiamente mostrato l’esistenza di ostacoli epistemologici all’apprendimento della matematica (D’Amore, Radford & Bagni, 2006; D’Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani & Sbaragli, 2008). Tuttavia, se davvero si vuol aiutare uno studente in difficoltà e se la natura dell’ostacolo è di tipo epistemologico, è necessaria la conoscenza della storia (anche epistemologica) dell’oggetto matematico che si è trasformato in ostacolo all’apprendimento.
Nel corso degli anni siamo giunti a formulare la seguente ipotesi: all’introdurre un oggetto matematico per il suo apprendimento, è utile dedicare del tempo alla sua storia o perlomeno al periodo storico o al personaggio che l’ha creato; un’attività di questo tipo risveglia l’interesse nei confronti di detto oggetto. Riguardo a quest’ipotesi siamo d’accordo con diversi studiosi (Fauvel & van Maanen, 2000; Bagni, 2004a, 2004b, 2004c; Bagni, Furinghetti & Spagnolo, 2004).
Ma usando questa metodologia, che garanzie abbiamo sull’effettivo apprendimento dell’oggetto matematico proposto? Pur essendo convinti sostenitori dell’uso della storia nel processo d’insegnamento-apprendimento della matematica, dobbiamo denunciare il fatto che l’ingenua equazione:

uso della storia nell'insegnamento equivale a *apprendimento sicuro*

non funziona automaticamente.
Certo, avere sempre a disposizione un contesto storico produce cultura ed elevate potenzialità, ma la certezza di attivare l’interesse e di raggiungere di conseguenza l’apprendimento non sono così banalmente legate a questi fattori e a questi contenuti.
Nonostante queste limitazioni, riteniamo che la conoscenza tanto della storia come dell’epistemologia della matematica siano necessarie alla formazione degli insegnanti, ma ciò non implica che debbano necessariamente essere usati come strumento didattico esplicito con gli studenti; se si decide di far uso della storia con questo fine, occorre molta cautela.
Di per sé, questo strumento metodologico è sì notevole, ma non è una panacea; l’averlo considerato come tale, in un recente passato, è stata un’altra delle molte illusioni.

1.7. Adozione di curricola o di progetti stranieri

Un atteggiamento tipico del mondo della didattica attiva, ma non della ricerca, è quello di considerare che i programmi nazionali non sono all’altezza della situazione attuale e, di conseguenza, guardare con ammirazione a quelli di altri paesi. Ad esempio, un determinato paese straniero ha successo con le prove PISA e si pensa dunque che il sistema di questo paese è il più adeguato, degno di venir imitato e importato. Questo atteggiamento superficiale e ingenuo non si è verificato solo nel passato; leggiamo continuamente parole di ministri, o dei cosiddetti esperti, o di professionisti dell’educazione che sognano d’importare nei loro paesi metodologie strumentali utilizzate in paesi i cui studenti hanno successo nelle prove PISA, con la speranza di poter risolvere così il fallimento nei confronti della matematica dei propri studenti.
Ultimamente, per esempio, si è diffusa in Italia l’idea illusoria idea di utilizzare come libri di matematica per la scuola primaria testi scolastici finlandesi, senza nemmeno tradurli (idea che ha guadagnato seguaci tra diverse persone acritiche). La rete italiana è satura di commenti al riguardo e in numerose località si stanno diffondendo banalità attorno all’uso di questi testi, considerati come la soluzione ai problemi di apprendimento della matematica. Anche il prestigioso quotidiano italiano *La Repubblica* ha favorito acriticamente l’emergere di queste illusioni publicando e incoraggiando l’uso di questi testi nella scuola primaria (si veda: http://video.repubblica.it/cronaca/viva-la-matikka-scuola-primaria-a-l).
Tutto ciò si traduce generalmente nell’importazione di programmi da altri paesi o nell’adozione di progetti didattici che hanno avuto successo in altri contesti. Questi sogni, vagamente esterofili, pur nelle loro ovvie ed evidenti differenze, sono analoghi. In passato, alcuni paesi che si autoconsideravano inferiori quanto al proprio sviluppo, chiamavano “esperti” di modelli stranieri e li incaricavano di formare i docenti nei nuovi curricola e di far loro assorbire le esperienze dei propri esperti. Potremmo fare vari esempi concreti di cui siamo venuti a conoscenza personalmente.

Questo modo di agire ha sempre generato un fallimento.
Il curricolo della matematica di un paese deve esprimerne anche la storia sociale e culturale, ragione per la quale non può essere asettico, aculturale, astorico.
Non conosciamo alcun esempio positivo di adozione dall'esterno che abbia avuto successo nell'apprendimento.
Analogamente, in relazione ai progetti stranieri. In Italia, ad esempio, sono stati tradotti i progetti RICME (ungherese; nel 1976), Nuffield (del 1967) e lo *School Mathematics Project* (del 1972; inglese), lo *Scottish Mathematics Project* (tradotto solo in minima parte nel decennio del 1970) e il *Fife Project* (1978) (questi due ultimi scozzesi) e tanti altri. Si trattava senza dubbio di progetti interessanti, stimolanti e curiosi, ma poi rapidamente abbandonati perché lontani dalla sensibilità e dalle aspettative dei docenti italiani.
Come scritto poco sopra, e come ratifichiamo, un progetto rispecchia l'identità culturale, matematica ed epistemologica del paese in cui nasce, la pratica didattica di quel paese, un certo modo di pensare. Certo si possono prendere esempi stranieri, ma a volte si entra in aperto conflitto. Ad esempio in Italia si definisce l'angolo in geometria sintetica elementare come *ognuna delle parti di piano illimitate comprese tra*[3] *due semirette che hanno in comune l'origine*. La ricerca scientifica ci ha insegnato che, quando gli studenti provano a costruire questo concetto, si trovano davanti a grandi difficoltà di tipo cognitivo (D'Amore & Marazzani, 2008). Nel progetto SMP l'angolo è definito operativamente come rotazione di una semiretta rispetto a un'altra fissa, avendo sempre le due semirette un'origine in comune (AA. VV. SMP, dal 1965). Ora, quello che può fare un docente è introdurre *anche* questa forma di proporre l'oggetto nell'aula: due modalità aiuteranno la capacità cognitiva degli allievi molto più di quanto possa farlo una sola.
Ma considerare che questo progetto interamente importato, lontano dalla tradizione d'insegnamento dei docenti, avrebbe garantito l'apprendimento solo perché è straniero, solo perché forma parte di un complesso ben articolato, è a dir poco ingenuo.
Un progetto didattico o una programmazione curricolare devono venir condivisi, pensati e costruiti di comune accordo, devono rispettare il modo di pensare e di lavorare di ogni singolo docente. Ciò non toglie che una programmazione curricolare o un progetto stranieri non possano offrire idee concrete (metodologiche o concettuali) al docente; anzi, lo faranno certamente. Ma riporvi una fiducia ingenua e acritica, non aiuta certo il processo professionale d'insegnamento-apprendimento.
La conoscenza curricolare e i progetti di altri paesi sono certamente di grande aiuto critico perché aprono al mondo e suggeriscono senza dubbio idee stimolanti. Ma il loro uso acritico non può essere una panacea; è solo un'idea illusoria e anche un po' banale.
Un'ultima annotazione. Consideriamo che una programmazione curricolare o un progetto sono l'espressione di una cultura locale, di un paese, e ne rappresentano in certo modo la storia. Ma i risultati della ricerca in didattica della matematica, invece, sono universali.
Il contratto didattico, il fenomeno della formazione di *misconcezioni*, l'inadeguatezza di alcuni modelli intuitivi rispetto ai modelli formali, la difficoltà di gestire trasformazioni semiotiche, il problema dell'apprendimento della generalizzazione ecc., sono l'evidenziazione di problematiche di carattere apprenditivo che si possono pensare come comuni a tutti i paesi.
Recentemente alcuni studiosi hanno voluto mettere in dubbio la veridicità di quest'ultima affermazione, suggerendo che gli studi di didattica della matematica dovrebbero essere locali e quindi focalizzati sul paese, sulle sue tradizioni e sulla sua storia culturale. Non escludiamo che ci possano essere considerazioni di questo tipo da fare (anzi, ne siamo consapevoli, anche in accordo con D'Ambrosio, 2002); ma nel complesso, l'interesse della didattica della matematica è generale, universale e non locale.

2. Gli strumenti illusori

[3] Qualunque cosa significhi "tra": accettiamolo come un termine primitivo alla maniera di Hilbert (1899).

In questa sezione presenteremo alcuni materiali concreti o risorse didattiche che erano state considerate idonee all'insegnamento di alcuni temi della matematica, in particolare dell'aritmetica e della logica. L'enfasi creata intorno a questi strumenti fu eccessiva, dato che venivano considerati come una vera e propria panacea per l'apprendimento, mentre la loro creazione faceva riferimento solo a metodologie d'insegnamento concrete. Ne proporremo qui solo alcuni; questi materiali (a volte chiamati "materiali strutturati" a causa della loro specificità e delle dettagliate norme d'uso), continuano a venir utilizzati tutt'oggi, anche se con sempre minor enfasi, mentre in diversi paesi altri "inventori" continuano a creare illusioni nei docenti meno critici.
Ci sono due categorie di materiali che non menzioneremo specificamente:
a) i giocattoli ludici che facevano riferimento all'apprendimento con slogan quali *imparare giocando*; in genere si trattava solo di giochi la cui funzione all'interno dell'apprendimento rimaneva alquanto occulta o appariva come ingenua; un giorno o l'altro un qualche studioso dovrà affrontare l'analisi scientifica dell'efficacia di questi giocattoli;
b) l'uso delle TIC come garanzia di apprendimento; questo problema ha bisogno di un'analisi approfondita dettagliata e specifica, data la vastità degli strumenti oggi disponibili; tuttavia, gli studi riguardo alle illusioni, a volte acritiche, che si svilupparono intorno a questi problemi sono molteplici; per esempio Davis (1992) parla esplicitamente di panacee; ma già all'alba dell'uso di diversi strumenti, tra cui il PC a scuola, si erano levate voci che cercavano di frenare facili e banali entusiasmi (ad esempio D'Amore, 1988c); voci non contrarie all'uso delle TIC, sia chiaro, contrarie alle facili e un po' banali ilusioni.
Come detto, queste due tipologie strumentali (a e b), richiedono un'analisi specifica che non affronteremo in questa sede.

2.1. Le reglettes o numeri in colore

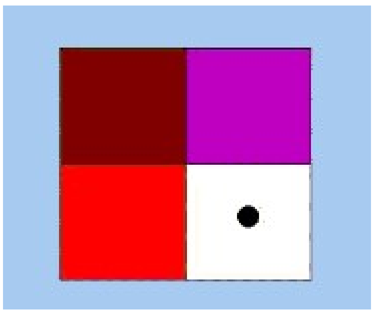
Si tratta generalmente di materiali in legno con forma di prisma quadrangolare regolare; il primo (bianco) è un cubo, ovvero lìaltezza del prisma è la stessa del lato del quadrato della base; il secondo (rosso) è due volte l'altezza del primo; il terzo (verde) ha tre volte l'altezza del primo; e così succesivamente fino a raggiungere un'altezza dieci volte maggiore dell'altezza del primo e cambiando il colore del prisma a mano a mano che cambia la sua altezza.

L'ideazione teorica è dovuta al matematico, pedagogo e filosofo egiziano Caleb Gattegno (1911-1988) mentre la realizzazione pratica con la relativa sperimentazione nella pratica didattica si deve al pedagogo belga Georges Cuisenaire (1891-1975). L'idea originale consiste nell'aggiungere una variabile semiotica alle già evidenti differenze di altezza tra i prismi, con il fine d'insegnare a dominare i numeri naturali da 1 a 10 e la somma di due o più numeri naturali pari a 10 (1+9, 2+4+4, e così via); accostare cioè prismi di varie lunghezze fino a raggiungere quello di altezza 10. In tutto

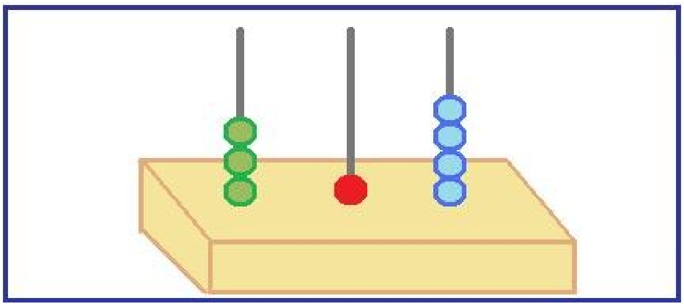
ciò il colore ha una funzione meramente estetica, ma certamente nessuna importanza dal punto di vista didattico.
Abbiamo già avuto modo di evidenziare le manchevolezze didattiche che si nascondevano dietro questi strumenti, che pure hanno goduto di vasta popolarità e hanno avuto successo intercontinentale. L'idea di aggiungere alle già tante varianti semiotiche relative ai numeri naturali quella cromatica, piacevole e dunque attraente, nasconde insidie non banali (Locatello, Meloni & Sbaragli, 2008).
La prima è che non c'è alcuna logica cromatica nei modelli delle operazioni elementari; i colori sono del tutto casuali, né potrebbe essere altrimenti. Rosso più Verde uguale a Giallo, non possiede nessuna motivazione di carattere cromatico.
La seconda è che i numeri che si citano rappresentano misure lineari, altezze di prismi che hanno tutti la stessa base, ma differenti altezze; ma non c'è né un'interpretazione cardinale né una ordinale dei numeri (a meno di forzature innaturali); dunque si perdono o si dimenticano significati importanti che formano parte della costruzione cognitiva dell'insieme dei numeri naturali (Marazzani. 2007).
La terza è che non c'è alcuna rappresentazione del numero zero, se non l'assenza dell'oggetto; dunque non si può rappresentare 7+0; il numero 0 è bandito da questo strumento.
A nostro avviso, queste gravi lacune e le evidenti contraddizioni non implicano automaticamente che non si debbano usare le reglettes (o numeri in colore). Ogni strumento ha delle sue potenzialità positive, in questo caso ad esempio il controllo diretto delle altezze, la gradevolezza dell'oggetto in sé e la possibilità di fare alcune addizioni per semplice accostamento. L'importante è non cadere nell'inganno illusorio della panacea: questo strumento ha anche risvolti negativi che è fondamentale conoscere; è importante non idealizzare lo strumento come fosse il migliore possibile, come fosse la soluzione di tutti i problemi di apprendimento. Perché le cose non sono così. Dunque, è necessario conoscerne bene vantaggi e svantaggi, per usare quello strumento, qualsiasi strumento, con acutezza e capacità critica. Occorre dominare lo strumento e non esserne dominati.

2.2. Gli abaci

La prima volta che abbiamo visto usare un abaco in una scuola primaria, nei primi anni del decennio del 1970, ci venne presentato come uno strumento per passare in modo quasi automatico da una base numerica all'altra; non per nulla si chiamava allora "abaco multibase". C'era allora la bizzarra idea che, per poter dominare i nuovi strumenti informatici che cominciavano a fare il loro ingresso nelle aule, si dovessero dominare più basi numeriche: la dieci, ovviamente, ma anche la quattro, la sei, la due ...
Per poter usare i PC (alcuni parlavano all'epoca di: programmare), gli studenti dovevano saper gestire i calcoli in base due, il che spiega anche il momentaneo successo che ebbe il cosiddetto minicomputer di George Papy (1920 – 2011): un quadrato di cartoncino diviso dalle due mediane in quattro quadratini che davano valori diversi alle pedine poste in ciascuno di essi (rispettivamente 2^0, 2^1, 2^2 e 2^3).



Oggi sappiamo che tutto ciò è straordinariamente e totalmente inutile: per usare il PC non è necessario saper programmare né tantomeno serve saper usare con abilità il sistema numerico in base due; resta tuttavia viva la proposta culturale che sempre ci viene suggerita ed evidenziata per controbattere alle nostre perplessità: l'abaco è un buon strumento per far sapere ai nostri allievi che non esiste solo la base dieci.
Fin da allora, abbiamo replicato agli insegnanti (e continuiamo a farlo) che ci sembra assai più interessante far notare che esistono sistemi numerici posizionali e non posizionali, perché questo mostra agli allievi quanto importante e geniale sia l'idea del sistema posizionale che genera, per esempio, algoritmi di calcolo semplici e rapidi, per eseguire i quali non servono abaci, sassolini o altri strumenti concreti, ma solo un foglio di carta e un lapis. Si provi infatti a eseguire la moltiplicazione 14×6 scrivendola; risulta banale con il sistema indo-arabico ma alquanto complicata con quello romano nn posizionale: XIV×VI ...
A questo punto, l'abaco diventa uno strumento sì obsoleto, ma curioso, interessante, purché serva non solo a rappresentare i numeri, ma anche a eseguire (tentare di eseguire) le operazioni.
L'abaco è uno strumento semplice e accattivante che però va ripensato nella sua funzione didattica; si tratta di un oggetto storico, collocato nel tempo, interessante, ma non certo di panacea. Si può usare fondamentalmente per mostrare il significato del valore posizionale delle cifre che esprimono numeri naturali. Ma dev'essere un oggetto concreto, da poter toccare con le mani e manipolare, non solo un disegno alla lavagna o sul libro di testo.
Ogni colonna deve contenere 9 palline o *fiches*; al momento di aggiungere la decima, vanno sfilate sia le nove già collocate che la decima ancora da infilare e solo una delle palline va messa nella colonna adiacente di sinistra.



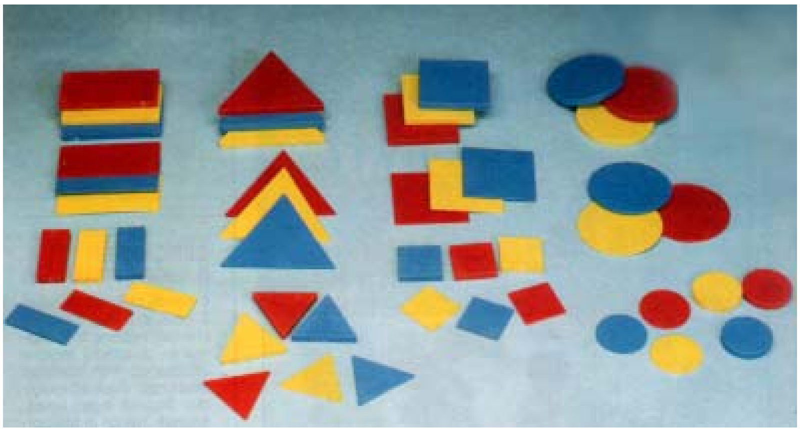
314

Ma qui s'annida un altro strano modo "cromatico" di vedere le cose. In molteplici occasioni abbiamo sentito dire ad alcuni docenti che le palline delle unità *devono* essere bianche e quelle delle decine rosse: ciascuna pallina rossa vale dieci bianche. Questa strampalata idea è contraria al senso stesso del valore posizionale delle cifre; sarebbe come dire che nel numerale 322 la cifra 2 al centro va colorata in rosso mentre la cifra 2 a destra in nero. Il significato del valore posizionale è che una cifra, *la stessa cifra*, ha valore diverso a seconda del *posto* che occupa e non del suo *colore*. Supponiamo che un allievo al buio prenda in mano tre palline e le stringa nel suo pugno. Accendiamo la luce. Alla domanda: quante palline hai nella mano?, la risposta ragionevole attesa è: "Tre"; non è, non può essere: "Non lo so, perché dipende dal colore di ogni pallina".
Lo ripetiamo parzialmente. Il senso aritmetico dell'abaco è il seguente: infiliamo delle palline forate una alla volta nella prima colonna a destra dell'abaco; fino a nove, va tutto bene; quanto tentiamo di mettere la decima, non ci riusciamo perché la colonna in cui tentiamo d'infilarla è corta e ha spazio solo per nove palline; allora tolgo tutte le nove palline già messe e ne metto una sola nella seconda colonna contando da destra, cioè quella delle decine. Quella pallina rappresenta dieci palline non in base al colore, ma in base alla posizione. L'abaco, dunque, con tutte le sue implicazioni e conseguenze, va ripensato daccapo; come molti degli strumenti creati dall'essere umano, ha sia aspetti positivi che negativi. Certamente non costituisce una panacea.

Anche nuove versioni dell'abaco, che abbiamo visto apparire negli ultimi lustri a più riprese, hanno certamente potenzialità positive, ma anche altri aspetti che non vanno elusi: sono strumenti, null'altro, non sono risolutivi, non costituiscono panacee. Ben vengano, se sono tenuti sotto controllo critico dal punto di vista dell'apprendimento, ma non devono costituire nuovi miraggi o creare nuove ricette.

2.3. I blocchi logici

I cosiddetti "blocchi logici" sono stati creati dal matematico ungherese Zoltan Paul Dienes (1916-2014), uno dei teorici più influenti della *New Mathematics*, a partire dai primi anni del 1960. La fama di questo strumento è tale che noi non consideriamo necessario spiegare di cosa si tratta.



Dienes si dedicò a sviluppare teorie che illustrassero alcuni aspetti cognitivi della matematica di carattere costruttivista post-Piaget dalla fine del 1950 in poi, ma la sua fama divenne internazionale solo verso la metà del decennio del 1960 (Dienes, 1966).
Le idee di Dienes circolarono con estrema disinvoltura in molte scuole a livello mondiale; ma l'acuta critica condotta da Guy Brousseau a metà degli anni '80 del XX sec. (Brousseau, 1986; si veda anche: D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani & Sarrazy, 2010) stroncò ogni illusione creatasi attorno alle proposte di Dienes; non solo i suoi famosi e onnipresenti blocchi logici, ma anche tutta la sua costruzione teorica.
Brousseau arrivò a definire un "effetto Dienes" in termini del tutto negativi, con un'analisi che era talmente potente ed evidente da eliminare ogni possibilità di reazione (D'Amore, Fandinño Pinilla, Marazzani & Sarrazy, 2010).
I blocchi logici hanno avuto una fortuna mondiale e sono stati usati da più di una generazione di studenti; ma nessuna scatola preconfezionata può di per sé produrre apprendimento; può produrre apprendimento locale e circostanziato, questo sì (Bruner, 1990). Tuttavia, come abbiamo già scritto in molte occasioni, il "transfer cognitivo" (cioè il passaggio della costruzione cognitiva da un ambiente a un altro), non è automatico e gli apprendimenti legati a un ambiente prefabbricato o precostituito, se avvengono, avvengono in esso, perché l'apprendimento dell'essere umano è "situato" e il suo transfer o la sua generalizzazione è un compito tipico della didattica, non è spontaneo né automatico (Lave & Wenger, 1990; D'Amore, 1999; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani & Sarrazy, 2010).
I "materiali strutturati", come vennero chiamati nella loro generalità, producono apprendimento all'interno di essi stessi, localmente; dunque servono a poco, se non a nulla, o sono addirittura controproducenti.
Un bambino impara certo, a modo suo, a riconoscere che «l'insieme dei tondi gialli è un sottoinsieme dei tondi», ma questo non gli serve a concludere spontaneamente, come avrebbe voluto la *mathématique vivante* di Dienes (1972), con un passaggio automatico di transfer cognitivo, che «l'insieme dei quadrati è un sottoinsieme dell'insieme dei rombi». Questa

affermazione va appresa a parte, non è conseguenza diretta, non si basa su quel che il bambino ha appreso operando con i blocchi logici di una scatola preconfezionata.
Tanto più, poi, si fa fatica a credere davvero che giocando con 4 note musicali e applicando loro una certa qual operazione binaria interna, a 7 anni, il bambino davvero «strutturi la sua mente» per imparare il concetto di gruppo astratto in algebra strutturale, in modo che questa (la mente) sia già disponibile all'apprendimento di strutture algebriche dello stesso tipo, come quella formata dalle isometrie con l'operazione binaria di composizione (Dienes, 1972; tutti gli esempi sono presi dal testo citato). A rileggere oggi questi sogni, non si riesce a credere che, davvero, qualcuno abbia potuto ragionevolmente pensare che questo fosse possibile. Ma lo studio di Brousseau (1986) ha perfettamente messo a nudo la vacuità di tutto ciò.
Dunque, i blocchi logici e tutti quegli strumenti che andarono sotto il nome di materiale strutturato sono stati sottoposti a critiche scientifiche severe che ne hanno rivelato i profondi difetti. Oggi alcuni docenti usano i blocchi logici solo come componenti oggettuali concreti che permettono agli allievi di costruire modelli di ambienti (aule, stanze), città, strade, casette... (D'Amore, 2002).
Il che non vuol dire che non si possa usare questo strumento, basta che non venga confuso con panacee inesistenti e che chi lo propone in aula lo faccia *cum grano salis*, consapevole dei limiti, senza vacue illusioni. Tutto quel che di matematica si può fare con i blocchi logici, si può fare con foglie, tappi di bottiglia, figurine e fiches da gioco.[4]
Lo stesso discorso si può fare relativamente a strumenti didattici che ancora oggi alcuni (in buona fede, ma per ignoranza scientifica) inventano e propongono, accompagnandoli con sogni illusori basati sul nulla e legati alla facilità con la quale certi insegnanti si lasciano sedurre da speranze create grazie a manufatti che promettono miracoli.
Il che non vuol dire che non debbano essere usati in assoluto; si possono usare, basta essere consapevoli che non sono, che non possono essere, panacee.

3. Alcune affermazioni per concludere

L'illusione delle ricette distrugge la professionalità degli insegnanti.
Il processo di insegnamento-apprendimento è complesso, inutile farsi illusioni e illudere: non esistono ricette. Inoltre, ogni studente apprende a modo suo (Fandiño Pinilla, 2001).

Nessuno può insegnarti a insegnare, la tua classe è un unicum.
Bisogna diffidare, di norma, da chi si propone come qualcuno in grado di insegnare a insegnare. Il compito della ricerca in didattica della matematica non è questo. Al contrario: lasciando piena libertà al professionista dell'educazione, cioè all'insegnante, di usare le metodologie che meglio crede (al plurale), il compito della ricerca in didattica della matematica è di mostrare e proporre strumenti concreti per interpretare le situazioni d'aula il cui schema, assai più complesso di quel che potrebbe apparire, è formato da: insegnante, allievo e sapere.

[4] A onor del vero, lo stesso Zoltan Dienes si rese conto da solo, in seguito ai lavori critici di Guy Brousseau, di aver prodotto un strumento con potenzialità negative e lo spiegò in una discussione pubblica che si tenne a Forlì l'8 maggio del 1993 su iniziativa di alcuni direttori di scuola fedeli alla linea didattica creata da Dienes. Il suo intervento fu il primo e in esso dichiarò con un coraggio ammirevole e con spirito autocritico: «Osservando il lavoro che facevano i docenti (…) ho pensato: Dio mio, che cosa ho combinato!». Non esistono documenti di detto dibattito, ma uno degli autori di questo testo era l'altro dialogante chiamato in causa a Forlì e dunque testimone diretto del fatto. Dunque, dai primi anni del 1990 Dienes era cosciente della debolezza cognitiva del suo lavoro e accettò le critiche ai suoi materiali strutturati. Il medesimo testimone era presente il 7 ottobre del 1980 a Cognola di Trento (Villa Madruzzo), durante un congresso internazionale proposto dal CNR Italia e dall'UMI (Unione Matematica Italiana). In questa occasione, Dienes si stupì del fatto che i matematici presenti e i colleghi didatti non apprezzassero le sue creazioni destinate all'azione dell'insegnamento e dubitassero tanto dei contenuti matematici così come dei risultati che promettevano, in relazione all'apprendimento.

L'uso di una sola metodologia di insegnamento è fallimentare.
Siccome ogni studente apprende a modo suo, l'uso di una sola metodologia o modalità didattica non può che avere successo su alcuni individui, ma certo non su tutti. Usando più modalità si aumenta la posibilita di favorire l'apprendimento del maggior numero possibile di studenti presenti in aula (D'Amore, 1999).

Solo la ricerca scientifica valida i risultati.
Mai fidarsi di chi non sottopone a giudizio scientifico serio e pertinente ciò che presenta come proposte di insegnamento.

Le analisi didattiche serie e scientifiche mostrano (talvolta a sorpresa) che certe attività date per scontate nascondono problemi cognitivi.
Ci limitiamo solo a un esempio. Nella scuola primaria si usa la linea dei numeri naturali. Alcuni docenti la fanno partire da 0, altri da 1. Questa "linea" è talmente diffusa che si finisce con il credere che sia "il" modello perfetto dei numeri naturali (il cui insieme indichiamo con N). Ma gli studi analitici, per esempio quelli condotti dalla scuola di Athanasios Gagatsis (vedasi ad esempio: Gagatsis, Shiakalli & Panaoura, 2003; Elia, 2011), hanno mostrato varie difficoltà e incongruenze.
Cominciamo con il pensare al fatto che il modello di N rappresentato dalla linea dei numeri è solo un modello ordinale, non cardinale e dunque non rappresenta una parte cospicua dei significati intuitivi di N. In altre parole, quel modello da solo non è affatto completo. Esso rappresenta più una successione ordinata che non un insieme numerico i cui elementi sono in grado di rispondere alla domanda: «Quanti sono?».
E inoltre: perché la distanza fra un numero n e il suo successivo n+1 deve essere uguale a quella fra m e m +1? Non c'è nessun motivo, se si pensa che, in N, fra n e n+1 non c'è nulla, c'è il vuoto, l'insieme N ordinato è discreto. C'è poi il problema che i numeri naturali servono anche nel campo della misura; in tal caso la *linea dei numeri* si può pensare come il bordo scritto di un righello, per cui i numeri indicano distanze dall'estremo 0. Una confusione che forse l'adulto domina (anche se abbiamo qualche dubbio) ma che il bambino non può controllare.
E poi c'è il problema delle operazioni. In N l'operazione 3+5 ha come modello intuitivo, spesso proposto dallo stesso insegnante come unico, il «mettere insieme delle cardinalità», la cardinalità 3 (un insieme di 3 palline) con la 5 (un altro insieme di 5 palline). Ma nella linea dei numeri questo modello intuitivo è stravolto e quello corretto è di tipo ordinale: partire da 3 e fare 5 passi, o salti, verso destra. 3+5 non andrebbe nemmeno più scritto così, quasi non ha senso scriverlo così: il 3 non è un addendo è un punto di partenza. Si tratta di un nuovo modello, assai poco intuitivo, che funziona solo perché si è supposto, alla base, un isomorfismo fra i modelli cardinale e ordinale. Molti bambini, per esempio, sono in difficoltà nell'interpretare sulla linea dei numeri una operazione come 5+0 che, per loro, non ha senso. Inoltre, parlando di cardinali, 5+0 è 5 senza alcun dubbio; parlando di ordinali molti studenti addirittura non accettano di scrivere 5+0 perché lo considerano privo di significato. Per non dire poi della sottrazione, che crea problemi inattesi che sono sotto gli occhi di tutti gli insegnanti. Se poi la linea numerica è fatta iniziare da 1, come abbiamo visto in molte occasioni, allora tutto ciò non solo perde senso, ma è addirittura sbagliato.
Ad esempio, non si può effettuare 5-0, ovvero qualcosa che sembra molto naturale: partire da 5 e "andare" a sinistra di 0 passi.
Abbiamo preso come esempio questo modello di N, molto diffuso, per far capire come strumenti che sembrano inoffensivi e ingenui e che vengono adottati da tutti, nascondono invece insidie didattiche ed epistemologiche profonde.
Lo abbiamo scelto proprio per la sua diffusione, per suggerire attenzioni critiche a tutti gli insegnanti, professionisti della formazione dei cittadini di domani.
Che cosa sarebbe poi la moltiplicazione sulla linea dei numeri? Come si passa dall'addizione alla moltiplicazione? Di solito ci si ferma a addizione e sottrazione proprio perché il modello della linea

dei numeri non permette di andare avanti; e, sembra ovvio, un modello che non permette di andare avanti, evidentemente non è un gran modello.
Il che non significa che non si debba usare questo modello di N; significa solo che, chi lo usa, lo deve studiare con attenzione critica e non credere che sia didatticamente indolore. (In generale su questo punto si veda: D'Amore, 1999).

4. Il nodo centrale: la formazione dei docenti di matematica

Formare insegnanti di matematica di tutti i livelli scolastici, come abbiamo più volte ribadito, comporta formazione matematica (*in primis*), formazione in didattica della matematica, formazione in storia ed epistemologia della matematica (D'Amore, 2004). Ma tutto quanto abbiamo qui voluto evidenziare rientra in una capacità critica che deve diventare sensibilità nel futuro docente. Solo questa sensibilità dovrebbe eliminare per sempre l'affannosa ricerca di una ricetta; e bandire per sempre dal mondo della scuola coloro che le propongono.
Ma la sensibilità non la si può insegnare; dipende in modo specifico dalla personalità professionale del docente. Il mestiere di formatori di esseri umani non è facile e non è riconducibile a ricette; è un mestiere creativo che ogni giorno ha bisogno della nostra capacità critica, sempre vigile e attenta. Se fosse riconducibile a ricette, chiunque potrebbe essere docente, e con successo. Eppure il docente si irrita quando un estraneo al mondo della formazione lo critica e gli suggerisce metodi diversi o tempi differenti da quelli che egli ritiene congeniali. Inoltre, applicando metodologie d'insegnamento considerate come correttamente funzionali all'apprendimento, il docente usa la propria competenza che non è solo *in matematica*, ma è anche una *competenza matematica*, ben diversa da quella di un matematico professionista o di un ingegnere (Fandiño Pinilla, 2003, 2006; D'Amore, Godino, Arrigo & Fandiño Pinilla, 2003).

Bibliografia

AA. VV. SMP (del 1965). *SMP School Mathematics Project*. Cambridge: Cambridge University Press.

Adler, J. (2000). Conceptualising Resources as a Theme for Teacher Education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3*(3), 205-224. Doi: 10.1023/A:1009903206236.

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F. L., & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(3), 359-381. Doi: 10.1007/s10649-005-5072-6.

Artigue, M., Gras, R., Laborde, C. & Tavignot, P. (editori) (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bagni, G. T. (1996). *Storia della matematica*. Vol. II. Bologna: Pitagora.

Bagni, G. T. (2004a). Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche. *La matematica e la sua didattica*, *18*(3), 51–70.

Bagni, G. T. (2004b). La storia della scienza: dall'epistemologia alla didattica. *Progetto Alice*, 15, 547–579.

Bagni, G. T. (2004c). Insegnamento–apprendimento storico. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *27A–B*(6), 706–721.

Bagni, G. T. & D'Amore, B. (2007). A trecento anni dalla nascita di Leonhard Euler. *Scuola ticinese*, *36*(281), 10-11.

Bagni, G. T., Furinghetti, F. & Spagnolo, F. (2004). History and Epistemology in Mathematics Education. In L. Cannizzaro, A. Fiori, & O. Robutti (Editores). *Italian Research in Mathematics Education 2000–2003*. 170–192. Milano: Ghisetti e Corvi.

Boero, P. (1986). Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, *9*(9), 48-93.
Boero, P., Dapueto, C., & Parenti, L. (1996). Didactics of mathematics and the professional knowledge of teachers. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Editores). *International handbook of mathematics education*. 1097-1121. Dordrecht e Londra: Kluwer Academic Publishers. Doi: 10.1007/978-94-009-1465-0_30.
Brissiaud, R. (1988). De l'âge du capitaine à l'âge du berger. Quel contrôle de la validité d'un énoncé de problème au CE2? *Revue française de pédagogie*, 82, 23-31.
Brousseau, G. (1965). *Les mathématiques du cours préparatoire.* Parigi: Dunod.
Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. *La mathématique à l'école élémentaire.* [París: APMEP]. 428-457.
Brousseau, G. (1980a). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rinologie*, *101*(3-4), 107-131.
Brousseau, G. (1980b). L'échec et le contrat. *Recherches en didactique des mathématiques*, 41, 177-182.
Brousseau, G. (1982). *À propos d'ingénierie didactique.* Université de Bordeaux I. IREM.
Brousseau, G. (1984). Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage. *Actes du colloque de la troisième Université d'été de didactique des mathématiques d'Olivet.*
Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.* Thèse pour le doctorat d'état. Université de Bordeaux I.
Brousseau, G. (1986), Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(*2*), 33-115.
Brousseau, G. (2015). Peregrinaciones en la didáctica de la matemática. En: D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M. I. (Compiladores). *Didáctica de la matemática. Una mirada internacional, empírica y teórica*. Chia (Colmbia): Univeridad de la Sabana. 13-28. ISBN: 978-958.12.0371.0.
Brousseau, G., & D'Amore, B. (2008). I tentativi di trasformare analisi di carattere meta in attività didattica. Dall'empirico al didattico. En B. D'Amore, & S. Sbaragli (Editores) (2008). *Didattica della matematica e azioni d'aula*. Atti del XXII Convegno Nazionale: Incontri con la matematica. Castel San Pietro Terme (Bo), 7-8-9 noviembre 2008. 3-14. Bologna: Pitagora.
Brousseau, G., & Perez, J. (1981). *Le cas Gaël*. Université de Bordeaux I: IREM.
Bruner, J. (1990). *Acts of Meaning*. Cambridge (MA): Harvard University Press.
Caldelli, M. L., D'Amore B. (1986). *Idee per un laboratorio di matematica nella scuola dell'obbligo*. Firenze: La Nuova Italia.
Camici, C., Cini, A., Cottino, L., Dal Corso, E., D'Amore, B., Ferrini, A., Francini, M., Maraldi, A.M., Michelini, C., Nobis, G., Ponti, A., Ricci, M., & Stella, C. (2002). Uguale è un segno di relazione o un indicatore di procedura? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *25*(3), 255-270.
Cornu, B. (1994). Teacher Education and Communication and Information Technologies: Implications for Faculties of Education. En B. Collis, I. Nikolova, & K. Martcheva (Editores) (1995). *Information technologies in teacher education. Issues and experiences for countries in transition*. *Proceedings of a European Workshop*. 93-104. Parigi: UNESCO.
D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatematica*. Bologna: Pitagora.
D'Amore, B. (1975). *La matematica inventata*. Bologna: Pitagora.
D'Amore, B. (1981). *Mostra dei materiali utilizzati per l'educazione matematica*. Catálogo-presentazione della mostra svoltasi nella Scuola primaria "G. Garibaldi" di Bologna, dal 30 maggio al 6 giugno de 1981. Bologna: Direzione didattica XV circolo – Assessorato P.I. del Comune di Bologna.
D'Amore B. (1982a). *Introduzione al catalogo della mostra* "Esposizione di matematica '81-'82". S.E. Gardolo (Tn). Trento: Provincia Autonoma di Trento, Assessorato Istruzione.

D’Amore B. (1982b). *Cura e introduzione al catalogo della mostra: Un progetto di matematica in mostra.* Maggio-giugno 1982. Scuola elementare Scandellara, Bologna. Bologna: Comune di Bologna – Assessorato al coordinamento delle politiche scolastiche.
D’Amore, B. (1987a). *Una mostra di matematica*. Teramo: Giunti & Lisciani.
D’Amore, B. (1987b). Cura e introduzione del catalogo*: Un progetto di Matematica in mostra*. Scuola Elementare Scandellara, Bologna, maggio-giugno 1987.
D’Amore, B. (1988a). Introduzione al catalogo della mostra: *Ma.S.E....giocassimo alla matematica*, mostra Ma.S.E. (Matematica Scuola Elementare), Imola (BO), inaugurazione 14 maggio 1988.
D’Amore, B. (1988b). Il laboratorio di Matematica come fucina di idee e di pensiero produttivo. *L’educazione matematica*, 3, 41-51.
D’Amore, B. (1988c). Evviva i burattini. *Scuola & Informatica - La Tartaruga*, 2, 20-23.
D’Amore, B. (1989a). Introduzione al catalogo: *I bambini e l’educazione matematica- Progetto Ma.S.E.* (Matematica Scuola Elementare). Lugo (Ra), inaugurazione: 23 maggio 1989.
D’Amore, B. (1989b). Introduzione di: *La Matematica fra i 3 e gli 8 anni - Guida alla visita dei laboratori*. Comune di Castel San Pietro Terme (Bo).
D’Amore, B. (1990-1991). Imparare in laboratorio. *Riforma della scuola*. 4 puntate. I: 11, 1990, 42-43; II: Numeri e teoremi in camice bianco, 1/2, 1991, 51-53; III: Fare per saper pensare, 5, 1991, 37-40; IV: Filosofia e linguaggi del laboratorio, 9, 1991, 36-38. [Sunto in: AA.VV. (1991). *Some italian contributions in the domain of the Psychology of Math. Ed*. Genova]. [Sunto in: Barra M. et al. (1992). *The italian research in Mathematics Education: common roots and present trends*. ICME, Québec, Agosto 1992. 129]. [Questo articolo è stato integramente pubblicato in appendice in: D’Amore B., Picotti M. (1991). *Insegnare matematica negli anni novanta nella scuola media inferiore*. Milán].
D’Amore, B. (1991). logica Logica LOGICA, la didattica della logica fra gli 8 e i 15 anni. En B. D’Amore (Editor) (1991). *La Matematica fra gli 8 ed i 15 anni*. 79-90. Bologna-Roma: Apeiron.
D’Amore, B. (1993a). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell’attività di problem solving*. Progetto Ma.S.E., vol. XA. Milán: Angeli. Prefazione di G. Vergnaud. [II edizione 1996]. [In lingua spagnola: D’Amore, B. (1997). *Problemas. Pedagogía y Psicología de la Matemática en la actividad de resolución de problemas*. Madrid: Editorial Sintesis. Trad. di F. Vecino Rubio].
D’Amore, B. (1993b). Il problema del pastore. *La vita scolastica*, 2, 14-16.
D’Amore, B. (1995). Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica. *La matematica e la sua didattica*, *9*(3), 328-370.
D’Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Prefazione di Colette Laborde. Bologna: Pitagora. [In spagnolo: D’Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Prefación de Luís Rico Romero, Colette Laborde y Guy Brousseau. Bogotá: Editorial Magisterio. In portoghese: D’Amore, B. (2007). *Elementos da Didática da Matemática*. São Paulo: Livraria da Física. Prefación de Ubiratan D’Ambrosio, Luís Rico Romero, Colette Laborde y Guy Brousseau. Il libro è stato commentato in *ZDM* 2001, *33*(4), 103-108 (por Hermann Maier)].
D’Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno*. 27, 51-76.
D’Amore, B. (2002). Basta con le cianfrusaglie! (Titolo della casa editrice). *La Vita Scolastica*, 8, 14-18.
D’Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [In spagnolo: D’Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. México DF: Reverté-Relime. Prefazione de Guy Brousseau. Prefazione all’edizione spagnola di Ricardo Cantoral].

D'Amore, B. (2004). Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*, *18*(4), 4-30.
D'Amore, B. (2005). La argumentación matemática de jóvenes alumnos y la lógica hindú (*nyaya*). *Uno*. 38, 83-99. [in inglese: D'Amore, B. (2005). Secondary school students' mathematical argumentation and Indian logic (nyaya). *For the learning of mathematics*, *25*(2), 26-32. In italiano: D'Amore, B. (2005). L'argomentazione matematica di allievi di scuola secondaria e la logica indiana (nyaya). *La matematica e la sua didattica*, *19*(4), 481-500].
D'Amore, B. (2006). Didattica della matematica "C". In S. Sbaragli (editore) (2006). *La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno*. Atti del Congresso Internazionale omonimo, Castel San Pietro Terme (Bo), 23 septiembre 2006. 93-96. Roma: Carocci.
D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Index.
D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2002). Un acercamiento analítico al triángulo de la didáctica. *Educación Matemática*, *14*(1), 48-62.
D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2003). Le due facce del laboratorio. Laboratori di recupero e sviluppo. *La vita scolastica. Dossier*. 1, 4-8.
D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Leonhard Euler, maestro di epistemologia e linguaggio. *Bollettino dei docenti di matematica*, 55, 9-14.
D'Amore, B., Fandiño Pinilla M. I., Marazzani I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del "contratto"*. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri.
D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson.
D'Amore, B., & Giovannoni, L. (1997). Coinvolgere gli allievi nella costruzione del sapere matematico. Un'esperienza didattica nella scuola media. *La matematica e la sua didattica*, *11*(4), 360-399.
D'Amore B., Godino D.J., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.
D'Amore, B., Godino, D. J., & Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Competencias y matemática*. Bogotà: Magisterio.
D'Amore, B., & Marazzani, I. (Editores) (2005). *Laboratorio di matematica nella scuola primaria. Attività per creare competenze*. Bologna: Pitagora.
D'Amore, B., & Marazzani, I. (2008). L'angolo, oggetto matematico e modello spontaneo. *La matematica e la sua didattica*, *22*(3), 285-329.
D'Amore, B., & Marazzani, I. (2011). Problemi e laboratori. Metodologie per l'apprendimento della matematica. Proyecto: *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. Vol. 4. Bologna: Pitagora.
D'Amore, B., & Matteuzzi, M. (1975). *Dal numero alla struttura*. Bologna: Zanichelli.
D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Principi di base della didattica della matematica*. Proyecto: *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. Vol. 2. Bologna: Pitagora.
D'Amore, B., & Speranza, F. (Editores) (1989). *Lo sviluppo storico della matematica - Spunti didattici*. Volume primo. Roma: Armando.
D'Amore, B. & Speranza, F. (Editores) (1992). *Lo sviluppo storico della matematica - Spunti didattici*. Volume secondo. Roma: Armando.
D'Amore, B., & Speranza, F. (Editores) (1995). *La matematica e la sua storia. Alcuni esempi per spunti didattici*. Milán: Angeli.
D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *29B*(1), 11-40.
Davis, Z. (1992). Alternative mathematics materials: Panacea or obstacle? In C. Breen, & J. Coombe (Editor). *Transformations: The first years of the Mathematics Education Project*. 18-37. Cape Town (SA): Mathematics Education Project.

De Bartolomeis, F. (1978). *Sistema dei laboratori per una scuola nuova necessaria e possibile*, Milano: Feltrinelli.

Dienes, Z. P. (1966). *Construction des mathématiques*. París: Presses Universitaires de France.

Dienes, Z. P. (1972), *La mathématique vivante*. París: OCDL.

Duval, R. (1995a). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1995b). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? Atti di l'École d'été 1995.

Elia, I. (2011). Le rôle de la droite graduée dans la résolution de problèmes additifs. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. (Irem de Strasbourg). 16, 45-66.

Fandiño Pinilla, M. I. (2001). La formazione degli insegnanti di matematica: una cornice teorica di riferimento. *La matematica e la sua didattica*, *15*(4), 352-373.

Fandiño Pinilla, M. I. (2003). "Diventare competente", una sfida con radici antropologiche. *La matematica e la sua didattica*, *17*(3), 260-280.

Fandiño Pinilla, M. I. (2006). *Currículo, evaluación y formación docente en matemática*. Bogotá: Magisterio.

Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática*. Prólogo de Giorgio Bolondi. Bogotá: Magisterio.

Fauvel, J., & van Maanen, J. A. (Editores) (2000). *History in Mathematics Education. An ICMI study*. Dordrecht: Kluwer.

Fischbein, E. (1985a). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In Chini Artusi, L. (Editor) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. 122-132. Bologna: Zanichelli-UMI.

Fischbein, E. (1985b). Intuizioni e pensiero analitico nell'educazione matematica. In Chini Artusi, L. (Editor) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. 8-19. Bologna: Zanichelli-UMI.

Fischbein, E. & Vergnaud, G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. (Editor Bruno D'Amore). Bologna: Pitagora.

Frabboni, F. (2004). *Il laboratorio*. Roma –Bari: Laterza.

Frank, M. L. (1985). What myths about mathematics are held and conveyed by teachers? *Arithmetic teacher*, 37, 10-12.

Freitas, J. L. M., & Rezende, V. (2013). Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. *RPEM: Revista Paranaense de Educação Matemática*, *2*(3), 10-34.

Gagatsis, A., Shiakalli, M., & Panaoura, A. (2003). La droite arithmétique comme modèle géométrique de l'addition et de la soustraction des nombres entiers. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 8, 95-112.

Hilbert, D. (1899). Grundlagen der Geometrie. In AA. VV. (1899). *Festschrift zur Feier der Entüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen*. Leipzig: Teubner. 1-92.

Kimmel, H., & Deek, F. (1996). Instructional technology: A tool or a panacea? *Journal of Science Education and Technology*, *5*(1), 87-91. Doi: 10.1007/BF01575474.

Kister, P., & Navarro, J. (1973). *La nueva matemática*. Barcelona: Salvat Editores.

Kleinmuntz, B. (1976). Problem Solving. *Psychological Review*. 83, 479–491.

Kline, M. (1973). *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math*. New York: St. Martin's Press.

Lave, J., & Wenger, E. (1990). *Situated Learning: Legitimate Periperal Participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Leder, G. C., Pehkonen, E., & Törner, G. (Editores) (2002). *Beliefs: A hidden variable on mathematics education?* 177-194. Dordrecht – Boston – London: Kluwer Ac. P.

Lederman, N. G., & Abell S. K. (Editores). *Handbook of Research on Science Education*. Routledge (NJ): Lawrence Erlbaum Associates.

Locatello S., Meloni G., Sbaragli S. (2008). Soli, muretti, regoli e coppie ... Riflessioni sull'uso acritico dei regoli Cuisenaire-Gattegno: i numeri in colore. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 31A*(5), 455-483.

Marazzani, I. (Ed.) (2007). *I numeri grandi*. Trento: Erickson.

Mashaal, M. (2006). *Bourbaki: A Secret Society of Mathematicians*. Providence (RI): American Mathematical Society.

Moser, J. M. (1985a). Alcuni aspetti delle più recenti ricerche sull'apprendimento dei concetti e delle abilità fondamentali della addizione e della sottrazione. In Chini Artusi, L. (Editor) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. 46-60. Bologna: Zanichelli-UMI.

Moser, J. M. (1985b). Analisi delle strategie di risoluzione dei problemi verbali. In Chini Artusi, L. (Ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. 61-85. Bologna: Zanichelli-UMI.

Nuffield Project (1972). *Computers and young children*. Veaving Guides, n. 4. London: Nuffield Foundation.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. New York: Basic Books.

Pehkonen, E. (1994). On Teachers' Beliefs and Changing Mathematics Teaching. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *15*(3-4), 177–209.

Pehkonen, E., & Törner, G. (1996). Introduction to the theme: Mathematical beliefs. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 28, 99-100.

Phillips, C. J. (2014) *The New Math: A Political History*. Chicago: University of Chicago Press.

Powers, K. D., & Powers, D. T. (1999). Making sense of teaching methods in computing education. In AA. VV. (1999). *Actas del Congreso Frontiers in Education Conference*. San Juan, Portorico. Vol. 1, 11B3, 30-35. Doi:10.1109/FIE.1999.839224.

Resnick, L. B. & Ford, W. W. (1981). *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale (NJ): L.E.A.

Schoenfeld, A. H. (1983). Beyond the purely cognitive: beliefs systems, social cognitions and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive science*, *7*(4), 329-363.

Scott, P. B. (1983). A Survey of Perceived Use of Mathematics Materials by Elementary Teachers in a Large Urban School District. *School Science and Mathematics*, *83*(1), 61-68. Doi: 10.1111/j.1949-8594.1983.tb10091.x.

Treagust, D. F. (2007). General instructional methods and strategies. In N. G. Lederman, & S. K. Abell (Editores) (2007). *Handbook of Research on Science Education*. Vol. 1, 373-391. Routledge (NJ): Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne: Peter Lang.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Editores) (1982). *Addition and subtraction*. 39-59. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh, & I. Landau (Editores) (1983). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. 127-174. New York – London: Academic Press.

Yourdon, E., & Constantine, L. (1979). *Structured Design: Fundamentals of a Discipline of Computer Program and System Design*. Saddle River (NJ): Prentice-Hall.